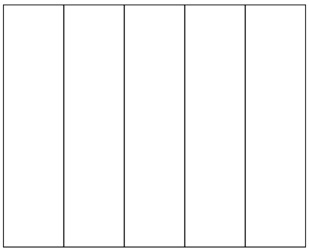
CHAPITRE 8

COURS : LES FRACTIONS

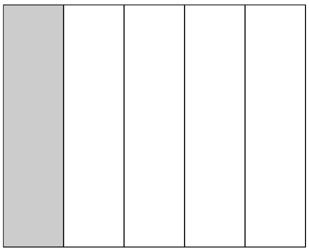
Extrait du programme de la classe de Sixième :

CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Écriture fractionnaire	– Interpréter $\frac{a}{b}$ comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire comme le nombre qui multiplié par b donne a. – Placer le quotient de deux entiers sur une demi-droite graduée dans des cas simples.	A l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire est introduite en référence au partage d'une "unité". Les activités en sixième s'articulent autour de trois idées fondamentales : – le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre ; – le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a ; – le nombre $\frac{a}{b}$ peut être approché par un décimal. Par exemple, $\frac{7}{3}$ est un nombre que l'on pourra envisager comme – 7 fois un tiers, – le tiers de 7 ou le nombre qui multiplié par 3 est égal à 7, – un nombre dont une valeur approchée est 2,33. La remarque est faite que tout nombre décimal peut s'écrire sous forme de quotient. Par exemple, $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. En revanche, certains quotients ne sont pas des nombres décimaux : $\frac{7}{3} \neq 2{,}33$. Le vocabulaire relatif aux écritures fractionnaires est utilisé : numérateur, dénominateur.
	Multiplier un nombre entier ou décimal par un quotient de deux entiers sans effectuer la division.	Il s'agit de "prendre une fraction" d'une quantité. L'utilisation de quotients, sous forme fractionnaire, permet de gérer plus facilement les raisonnements et de repousser la recherche d'une valeur approchée décimale à la fin de la résolution. Le vocabulaire commun, introduit à l'école primaire, est utilisé : double/moitié, triple/tiers, quadruple/quart. Les élèves doivent être entraînés à effectuer mentalement des calculs utilisant ces expressions, sur des nombres entiers ou décimaux simples.
	Reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre.	Le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul est mis en évidence et utilisé. La connaissance des tables de multiplication est notamment exploitée à cette occasion. La notation $\frac{a}{b}$ peut, à partir de là, être étendue au cas du quotient de deux décimaux et des égalités comme $\frac{5{,}24}{2{,}1} = \frac{524}{210}$ peuvent être utilisées, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet.

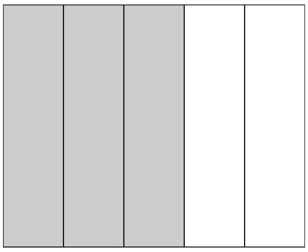
1 Situation de partage



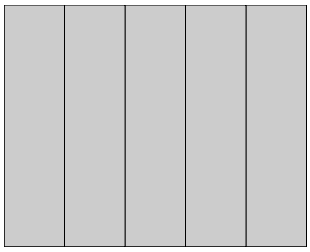
Un rectangle, partagé en cinq parts égales.



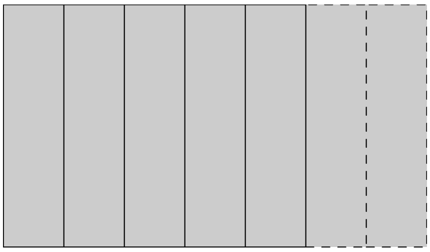
On a colorié **une** part du rectangle, ce qui représente **un cinquième** $\left(\frac{1}{5}\right)$ du rectangle.



On a colorié **trois** parts du rectangle, ce qui représente **trois cinquièmes** $\left(\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}\right)$ du rectangle.



On a colorié **les cinq** parts du rectangle, ce qui représente **cinq cinquièmes** $\left(\frac{5}{5} = 5 \times \frac{1}{5}\right)$ du rectangle, et donc sa totalité $\left(5 \times \frac{1}{5} = 1\right)$.



On a colorié **sept** parts de ce rectangle, ce qui représente **sept cinquièmes** $\left(\frac{7}{5} = 7 \times \frac{1}{5}\right)$ du rectangle.

Vocabulaire :

– Quand on partage en **deux** parts égales, on obtient des **demis**,

– Quand on partage en **trois** parts égales, on obtient des **tiers**,

– Quand on partage en **quatre** parts égales, on obtient des **quarts**,

– Quand on partage en **cinq, six, sept,. . ., dix,. . ., cent** parts égales, on obtient des **cinquièmes, sixièmes, septièmes,. . ., dixièmes,. . ., centièmes,. . .** .

2 Ecriture fractionnaire d'un quotient

On se rappelle que le **quotient** exact d'un nombre entier a par un nombre entier b (non nul) est le nombre qui, multiplié par b, donne a. (voir chapitre 6). Autrement dit, le quotient de a par b est le facteur manquant dans la multiplication $a \times ? = b$.

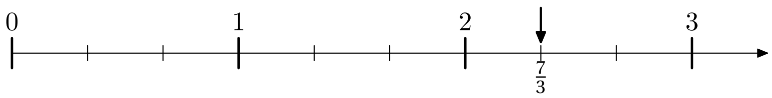
Définition :
Le quotient de a par b peut s'écrire sous forme **fractionnaire** : $a \div b = \dfrac{a}{b}$, et on a $b \times \dfrac{a}{b} = a$.
a est appelé **numérateur** de la fraction, alors que b est appelé **dénominateur** de cette fraction.

Par exemple,

- l'écriture fractionnaire du quotient de 8 par 5 est $\frac{8}{5}$; de plus, ce quotient est exact, et vaut 1,6. On a $5 \times \frac{8}{5} = 5 \times 1{,}6 = 8$.
- l'écriture fractionnaire du quotient de 8 par 3 est $\frac{8}{3}$; mais ce quotient ne peut pas s'écrire sous la forme d'un nombre décimal (*la division "ne s'arrête pas"*) : on ne peut en donner qu'une valeur décimale approchée (par exemple, son arrondi au centième est 2,67). On a $3 \times \frac{8}{3} = 8$.

Remarque :
Il est donc important de retenir que le quotient $\dfrac{a}{b}$, écrit sous forme fractionnaire, est un **nombre**, qui peut s'écrire sous la forme d'un nombre décimal $\left(\text{comme } \dfrac{8}{5}\right)$ ou pas $\left(\text{comme } \dfrac{8}{3}\right)$.

Par exemple, $\dfrac{7}{3}$ est un nombre écrit sous forme fractionnaire : c'est le **quotient** de 7 par 3 (*que l'on pourrait aussi écrire* $7 \div 3$), c'est le facteur manquant dans la multiplication $3 \times ? = 7$. On a ainsi $3 \times \dfrac{7}{3} = 7$.
Le nombre $\dfrac{7}{3}$ se lit "sept tiers", ou encore "le tiers de sept". Ce nombre ne peut pas s'écrire sous forme décimale, mais on peut en donner une valeur décimale approchée (*par exemple,* $\dfrac{7}{3} \approx 2{,}33$).
Comme tous les autres nombres, on peut placer le nombre $\frac{7}{3}$ sur une droite graduée :



On le fait en "comptant les tiers" à partir de 0 (sept graduations, donc).

3 Différentes écritures fractionnaires pour un même nombre

Propriété :
Un quotient $\dfrac{a}{b}$ ne change pas lorsque l'on multiplie (ou divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k} \quad \text{et ceci, quel que soit le nombre } k \text{ différent de } 0$$

Par exemple :
$\dfrac{8}{5}$ et $\dfrac{24}{15}$ sont deux écritures fractionnaires d'un même nombre, dont l'écriture décimale est 1,6.
En effet, $\dfrac{8}{5} = \dfrac{8 \times 3}{5 \times 3} = \dfrac{24}{15}$; ces deux nombres sont placés au même endroit sur la droite graduée :

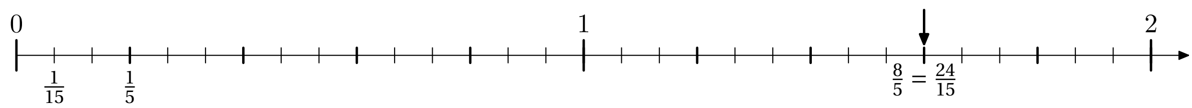
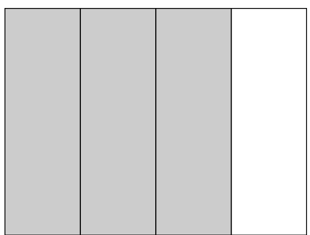


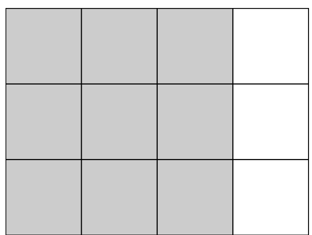
Illustration :

Les fractions $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{9}{12}$ sont égales :

en effet, $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \times 3}{4 \times 3} = \dfrac{9}{12}$



On a colorié les $\frac{3}{4}$ du rectangle.



On a colorié les $\frac{9}{12}$ du rectangle.

▸ **Une première application : calcul mental**

Exemple 1 : $\dfrac{7}{5} = \dfrac{7 \times 2}{5 \times 2} = \dfrac{14}{10} = 1{,}4$

Exemple 2 : $\dfrac{4}{25} = \dfrac{4 \times 4}{25 \times 4} = \dfrac{16}{100} = 0{,}16$

▸ **Une deuxième application importante : simplifier une fraction**

Exemple 1 : $\dfrac{63}{45} = \dfrac{63 \div 9}{45 \div 9} = \dfrac{7}{5}$

Exemple 2 : $\dfrac{36}{44} = \dfrac{9 \times \cancel{4}}{11 \times \cancel{4}} = \dfrac{9}{11}$

▸ **Une troisième application : quotient de deux nombres décimaux**

Exemple 1 : $\dfrac{15}{0{,}4} = \dfrac{15 \times 10}{0{,}4 \times 10} = \dfrac{150}{4}$

Exemple 2 : $\dfrac{3{,}24}{4{,}8} = \dfrac{3{,}24 \times 10}{4{,}8 \times 10} = \dfrac{32{,}4}{48}$

ce qui permet de poser la division d'un nombre décimal par un autre :

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 3\cancel{,} & 2{,} & 4 & 4\cancel{,}8 \\ \cline{5-5}
- & 2 & 8 & & 0{,}6\,7\,5 \\ \cline{2-3}
 & & 3\,6 & 0 & \\
- & & 3\,3 & 6 & \\ \cline{3-4}
 & & 2 & 4\,0 & \\
- & & 2 & 4\,0 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

où l'on décale la virgule dans le dividende et dans le diviseur **du même nombre de rangs** (ce qui revient à les multiplier par 10, 100,...), jusqu'à ce que le diviseur soit entier !

Remarque importante :
Tous les nombres décimaux (et donc aussi les nombres entiers) admettent des écritures fractionnaires : par exemple : $2{,}4 = \dfrac{24}{10} = \dfrac{12}{5} = \ldots$ $\quad 3 = \dfrac{3}{1} = \dfrac{6}{2} = \dfrac{30}{10} = \ldots$

4 Opérations sur les nombres en écriture fractionnaire

Addition et soustraction de deux nombres en écriture fractionnaire :
Si les deux fractions ont **le même dénominateur**, on additionne (ou soustrait) les numérateurs entre eux, et on conserve le dénominateur commun :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

▸ **Si les deux fractions ont déjà le même dénominateur :**

Exemple 1 : $\dfrac{5}{3} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{5+8}{3} = \dfrac{13}{3}$

Exemple 2 : $\dfrac{33}{100} - \dfrac{17}{100} = \dfrac{33-17}{100} = \dfrac{16}{100} = 0{,}16$

▸ **Si les deux fractions n'ont pas le même dénominateur :**
On commence par utiliser la règle des quotients égaux, pour que les deux fractions aient le même dénominateur :

Exemple 1 : $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{8} = \dfrac{6}{8} + \dfrac{5}{8} = \dfrac{6+5}{8} = \dfrac{11}{8}$

Exemple 2 : $\dfrac{16}{5} - \dfrac{27}{10} = \dfrac{32}{10} - \dfrac{27}{10} = \dfrac{32-27}{10} = \dfrac{5}{10} = 0{,}5$

Multiplication d'un nombre décimal ou entier par une fraction :

Pour effectuer l'opération $\dfrac{a}{b} \times c$, il y a trois possibilités :

Méthode 1 :

On multiplie le nombre c par a, puis on divise le résultat par b

$\dfrac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$

Méthode 2 :

On divise a par b, puis on multiplie le résultat par c

$\dfrac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$

Méthode 3 :

On divise c par b, puis on multiplie le résultat par a

$\dfrac{a}{b} \times c = (c \div b) \times a$

Par exemple :

- $\dfrac{2}{3} \times 15 = \begin{cases} (2 \times 15) \div 3 = 30 \div 3 = 10 \text{ avec la méthode 1} \\ \text{impossible avec la méthode 2} \\ (15 \div 3) \times 2 = 5 \times 2 = 10 \text{ avec la méthode 3} \end{cases}$

- $\dfrac{3}{10} \times 8 = \begin{cases} (3 \times 8) \div 10 = 24 \div 10 = 2{,}4 \text{ avec la méthode 1} \\ (3 \div 10) \times 8 = 0{,}3 \times 8 = 2{,}4 \text{ avec la méthode 2} \\ (8 \div 10) \times 3 = 0{,}8 \times 3 = 2{,}4 \text{ avec la méthode 3} \end{cases}$

- $\dfrac{7}{3} \times 15 = \begin{cases} \text{difficile avec la méthode 1} \\ \text{impossible avec la méthode 2} \\ (15 \div 3) \times 7 = 5 \times 7 = 35 \text{ avec la méthode 3} \end{cases}$

Il s'agit ici de "prendre une fraction" $\frac{a}{b}$ d'une quantité c ; par exemple, lorsque je dis que je prends **les deux tiers de quinze** (euros, par exemple), je dois effectuer le calcul $\dfrac{2}{3} \times 15$.

Application : Appliquer un pourcentage :

Prendre t % d'une quantité, c'est multiplier cette quantité par $\dfrac{t}{100}$.

Par exemple, si je veux calculer 15 % de 250, je fais $\dfrac{15}{100} \times 250 = 37,5$.