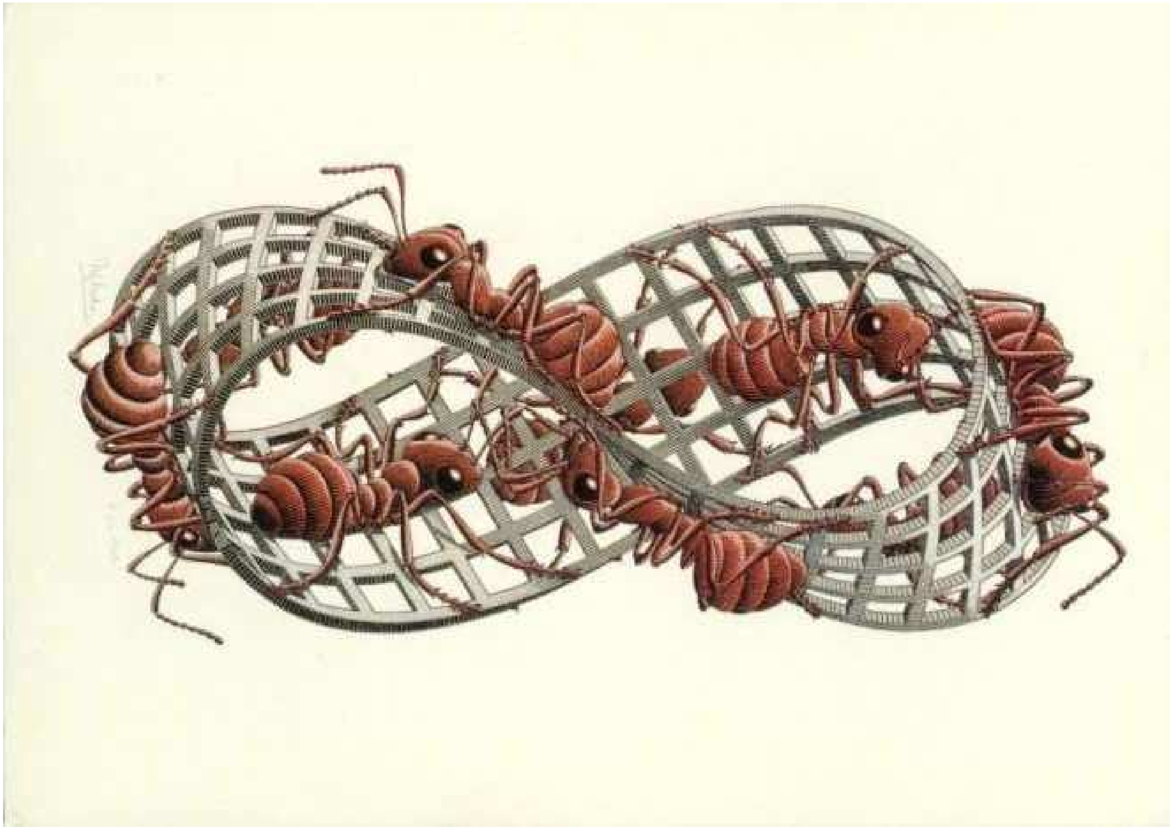
Memento de mathématiques



Classe de $1^{ère}$ S

Vous trouverez ici quelques éléments du cours de mathématiques de première S, qu'il convient de maîtriser pour aborder sans trop d'angoisse la classe de Terminale.

Ce document ne prétend pas à l'exhaustivité, et quelques erreurs peuvent subsister, malgré une relecture attentive. Enfin, ce document récapitule des savoirs, mais les savoir-faire, les démonstrations, les astuces de calcul, les exercices-types, … bref tout ce qui fait le sel de la classe de première est ici occulté. Vous savez qu'il n'est plus suffisant de compiler des savoirs ! Ceci peut quand même vous aider pour retrouver un résultat du cours (comme une formule, une définition, un théorème…) un peu oublié. N'oubliez pas que le bac se prépare sur deux ans (première et Terminale) !

Thierry Joffredo

Pour votre culture mathématique :

Bibliographie:

Les ouvrages de Denis GUEDJ, d'accès aisé et très intéressants quant à l'histoire de cette discipline (tous chez Seuil, collection Points):

- *Les cheveux de Bérénice* (histoire de la première mesure du rayon terrestre par Eratosthène)
- *Le théorème du perroquet* (véritable abrégé de 2000 ans d'histoire des mathématiques)
- *Le mètre du monde* (histoire de la création du mètre et du système décimal)

Deux ouvrages de culture générale mathématique, à peine plus difficiles d'accès:

- *La vie rêvée des maths* de David BERLINSKI (histoire du calcul différentiel) chez Saint-Simon
- *L'œil et le compas* de MLODINOW (histoire complète de la géométrie, de Thalès à Einstein) chez le même éditeur. (à conseiller)

Un peu plus difficiles, mais toujours abordables, concernant les mathématiques plus "actuelles":

- *Le dernier théorème de Fermat* de Simon SINGH, chez Hachette Littératures, collection Pluriel.
- *Histoire des codes secrets* du même auteur, Le Livre de Poche (cryptographie)
- *Les mathématiques* de Ian STEWART
- *Gödel, Escher, Bach* de Douglas HOFSTADTER chez InterEditions (mathématiques, art et musique)

Sur le Web :

Vous pouvez consulter avec grand profit les sites suivants :

- Le site Bacamaths de Gilles Costantini à l'adresse http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/ (cours, fiches d'exercices, devoirs, annales de bac, méthodes…)
- Le site Xmaths à l'adresse http://xmaths.free.fr/ (même type de contenu…)
- Le site Bibmaths à l'adresse http://www.bibmath.net/ (plus de contenu culturel et historique)

1. GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Définition:
On appelle **fonction numérique** f tout procédé qui, à un nombre x, associe un unique nombre y appelé **image** de x par f, et noté $y = f(x)$. On dit également que x est un **antécédent** de y par la fonction f. L'ensemble, noté D_f , des valeurs du nombre x pour lesquelles existent une image y par la fonction f est appelé **ensemble de définition** de la fonction f.

Définition:
La **courbe représentative** de la fonction f dans un repère du plan est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x ; $f(x)$) où $x \in D_f$. Ainsi, "le point $M(x;y)$ appartient à la courbe représentative de f" est une proposition équivalente à "$x \in D_f$ et $y = f(x)$".
On dit alors que "$y = f(x)$" est une **équation de cette courbe** dans le repère du plan.

Définition:
Dire que la fonction f est strictement **croissante** (respectivement **décroissante**) sur un intervalle $I \subset D_f$ signifie que, pour tous réels u et v dans I, tels que $u < v$, on a $f(u) < f(v)$ (respectivement $f(u) > f(v)$).
On dit qu'une fonction strictement croissante **conserve** l'ordre (alors qu'une fonction strictement décroissante, elle, **inverse** l'ordre).

Définition:
Soit I un intervalle inclus dans D_f ; On dira que f admet un **minimum** en $x_0 \in I$ (respectivement un **maximum**) si, pour tout réel x dans I, on a $f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $f(x) \leq f(x_0)$).

Définition:
- Une fonction f sera dite **minorée sur I** $\subset D_f$ si et seulement si il existe un nombre réel m tel que, pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \geq m$. Le nombre m est alors appelé un **minorant de *f* sur I**, et tout nombre inférieur à m sera un autre minorant de f sur I.
- Une fonction f sera dite **majorée sur I** $\subset D_f$ si et seulement si il existe un nombre M tel que, pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \leq M$ .. Le nombre M est alors appelé un **majorant de *f* sur I**, et tout nombre supérieur à M sera un autre majorant de f sur I.
- Une fonction à la fois majorée et minorée sur I est dite **bornée**.

Définition:
Une fonction f, définie sur D_f , sera dite **paire** (respectivement **impaire**) si:
- D_f est centré sur zéro (i.e. pour tout $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ également).
- Pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$).

La courbe représentative de la fonction f admet alors l'axe des ordonnées comme axe de symétrie (respectivement l'origine du repère comme centre de symétrie)

Définition:
Soit T un nombre strictement positif; une fonction f définie sur D_f sera dite **T-périodique** (ou périodique de période T) si, pour tout réel $x \in D_f$ on a $f(x + T) = f(x)$. La courbe représentative de cette fonction sera alors invariante par toute translation de vecteur $nT\vec{i}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Définition :
Soient deux fonctions u et v définies respectivement sur D_u et D_v, tels que les images par u soient dans D_v.
On définit la **fonction composée de *v* par *u***, notée $\boldsymbol{u \circ v}$, par : $u \circ v : x \longmapsto u \circ v\,(x) = u\,[\,v(x)\,] \quad \forall\, x \in D_v$

Théorème : sens de variation d'une fonction composée.
Soient u et v deux fonctions, v définie sur I et u définie sur J telles que $v(I) \subset J$ (les images par v sont dans J). Soit $w = u \circ v$ la composée de v par u. Alors :

- si u et v ont des sens de **variations identiques**, alors w est **croissante** sur I.
- si u et v ont des sens de **variations contraires**, alors w est **décroissante** sur I.

Fonctions associées:

Théorème : u est une fonction définie sur un intervalle I, Γ est sa courbe représentative dans un repère du plan, et λ est un nombre réel donné.

- La courbe de la fonction $f : x \longmapsto u(x + \lambda)$ s'obtient par translation de la courbe Γ de vecteur $-\lambda\vec{i}$.
- La courbe de la fonction $f : x \longmapsto u(x) + \lambda$ s'obtient par translation de la courbe Γ de vecteur $\lambda\vec{j}$.
- La courbe Γ' de la fonction $f : x \longmapsto u(\lambda x)$ s'obtient à partir de la courbe Γ de la façon suivante :
  Pour une même ordonnée, on multiplie l'abscisse du point de Γ par $1/\lambda$ pour obtenir l'abscisse du point correspondant de Γ'.
- La courbe Γ' de la fonction $f : x \longmapsto |u(x)|$ s'obtient à partir de la courbe Γ de la façon suivante :
  Sur les intervalles où $u(x)$ est positif, Γ' et Γ sont confondues.
  Sur les intervalles où $u(x)$ est négatif, Γ' et Γ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Eléments de symétrie d'une courbe:

- La droite d'équation $(x = a)$ est axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction f si et seulement si $\forall$ h $\in \mathbb{R}$, a + h et a – h sont dans D_f et $f(a - h) = f(a + h)$
- Le point de coordonnées $(a\ ;\ b)$ est centre de symétrie pour la courbe représentative de la fonction f si et seulement si $\forall$ h $\in \mathbb{R}$, a + h et a – h sont dans D_f et $f(a - h) + f(a + h) = 2b$

2. POLYNOMES DU SECOND DEGRE

Définition-Théorème:

Une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction polynôme** lorsqu'il existe un entier naturel n et des nombres réels $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_1, a_0$ tels que, pour tout $x \in$ I, R, on ait:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

Toute fonction polynôme s'écrit **de manière unique** sous cette forme (appelée forme réduite du polynôme); le nombre n s'appelle **degré** du polynôme, les réels $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_1, a_0$ sont ses **coefficients** (le coefficient a_n est appelé **coefficient dominant** de P). Le terme (ou **monôme**) $a_i x^i$ (pour $0 \le i \le n$) est appelé **terme de degré i** du polynôme

Propriété:

On donne deux polynômes non nuls P et Q définis pour $x \in \mathbb{R}$ par:
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_0$
Ces polynômes sont dits **égaux** si et seulement si, pour tout réel x, on a $P(x) = Q(x)$. Cela équivaut à dire qu'ils ont le même degré: n = p, et que les coefficients des termes de mêmes degré sont égaux:
$a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ \ldots\ldots,\ a_0 = b_0$.

Définition:

Soit P un polynôme. On appelle **racine du polynôme P** tout nombre réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

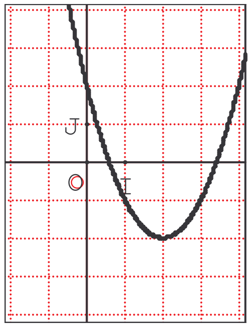
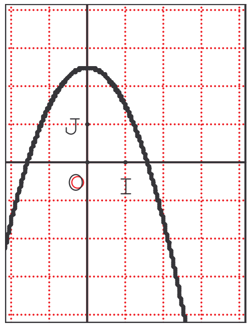
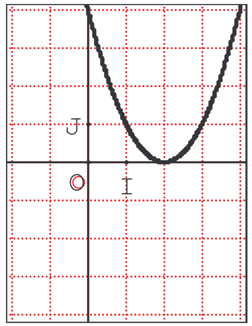
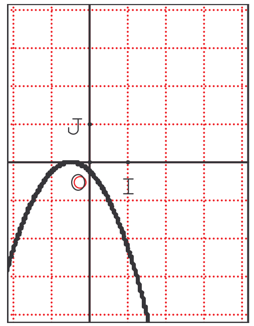
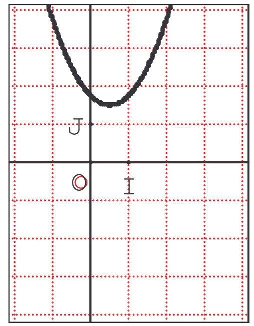
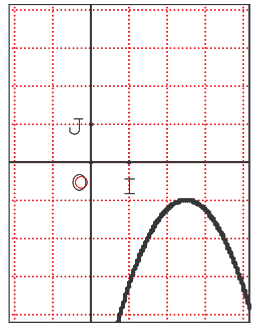
Théorème (admis): Factorisation d'un polynôme

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Si α est une racine du polynôme P, alors on peut factoriser l'expression de $P(x)$ par $(x - \alpha)$. Il existe donc un polynôme Q de degré n – 1 tel que, pour tout x réel, $P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$.

Résultats concernant les polynômes du second degré:

$P(x) = ax^2 + bx + c$ est un trinôme du second degré ($a \neq 0$), et $\Delta = b^2 - 4ac$ est son **discriminant**. Sa **forme canonique** est $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

La courbe représentative de P dans un repère est une **parabole**, image de la parabole d'équation ($y = ax^2$) par la **translation** de vecteur $-\dfrac{b}{2a}\vec{i} - \dfrac{\Delta}{4a}\vec{j}$

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Si Δ > 0</th><th colspan="2">Si Δ = 0</th><th colspan="2">Si Δ < 0</th></tr>
<tr><td>ALLURE DE LA COURBE</td>
<td>Si $a > 0$
</td>
<td>Si $a < 0$
</td>
<td>Si $a > 0$
</td>
<td>Si $a < 0$
</td>
<td>Si $a > 0$
</td>
<td>Si $a < 0$
</td></tr>
<tr><td>SOMMET</td><td colspan="6">Le sommet S de la parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$</td></tr>
<tr><td>VARIATIONS DE P</td><td colspan="6">Si $a > 0$ alors P est décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$, croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$. Si $a < 0$ alors P est croissante sur $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$, décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$</td></tr>
<tr><td>RACINES</td><td colspan="2">deux racines: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$</td><td colspan="2">une racine: $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$</td><td colspan="2">pas de racine</td></tr>
<tr><td>FACTORISATION</td><td colspan="2">$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$</td><td colspan="2">$P(x) = a(x - \alpha)^2$</td><td colspan="2">Pas de factorisation</td></tr>
<tr><td>TABLEAUX DE SIGNES</td>
<td colspan="2"><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de P(x)</td><td>signe de a</td><td>opposé du signe de a</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td>
<td colspan="2"><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de P(x)</td><td>signe de a</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td>
<td colspan="2"><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de P(x)</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

3. NOMBRE DERIVE

Définition:
Si a et b sont deux réels de l'intervalle I avec $a<b$, le **taux de variation t de f entre a et b** (encore appelé **accroissement moyen**) est donné par $t = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interprétation graphique:
Si $A(a; f(a))$ est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a, et $B(b; f(b))$ est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse b, alors le taux de variation t est le coefficient directeur de la corde (AB) :

Définition:
Soit h un réel tel que $a + h$ soit dans I.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est donné par $t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Si, quand h tend vers 0, cet accroissement admet pour limite un réel l, alors on dit que la fonction f est **dérivable en *a***.

Cette limite est appelée **nombre dérivé de *f* en *a***, et est notée $f\,'(a)$ (ou parfois $\dfrac{df}{dx}(a)$)

On a $f\,'(a) = \lim\limits_{h\to 0} t(h) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Théorème: tangente
$f\,'(a)$ est le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A de coordonnées $(a; f(a))$. L'équation réduite de cette tangente est donnée par $y = f\,'(a)(x-a)+f(a)$

Théorème: **approximation affine d'une fonction**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a. Alors pour tout réel h tel que $a+h \in I$, on a:

$$f(a+h) = f(a) + hf\,'(a) + h\varepsilon(h)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0

4. FONCTION DERIVEE

Définition:
Soit f une fonction dont l'ensemble de définition sera désigné par D_f. Soit I un intervalle inclus dans D_f, sur lequel f est dérivable (c'est-à-dire que f admet un nombre dérivé en tout $a \in I$). Alors on peut définir une fonction qui, à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x, noté $f\,'(x)$. Cette fonction est appelée **fonction dérivée de *f* sur *I***, et est notée $f\,'$.

Dérivées des fonctions usuelles:

Si $f(x) = \ldots$	alors f est dérivable sur…	et $f'(x) = \ldots$
k (constante réelle)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$x^n, n \geq 1$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}, n \geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Dérivée et opérations:

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, k est un réel quelconque.

Si $f(x) = \ldots$	alors f est dérivable sur…	et $f'(x) = \ldots$
$u(x)+v(x)$	I	$u'(x)+v'(x)$
$ku(x)$	I	$ku'(x)$
$u(x)v(x)$	I	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\frac{1}{v(x)}$	I, moins les réels x tels que $v(x)=0$	$-\frac{v'(x)}{v(x)^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	I, moins les réels x tels que $v(x)=0$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
$u(ax+b)$	I	$au'(ax+b)$
Par exemple: $(ax+b)^n$ $n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$na(ax+b)^{n-1}$
Par exemple: $\sqrt{ax+b}$	$]-\frac{b}{a};+\infty[$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Théorème:
Soit f une fonction définie et dérivable sur I
- Si f est croissante sur I alors la fonction dérivée f' est positive sur I.
- Si f est décroissante sur I alors la fonction dérivée f' est négative sur I.

Théorème:
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert.
- Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si la fonction dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et soit $c \in I$.
On dira que ***f* admet un maximum local *M* en *c*** si, pour tout réel x d'un certain intervalle ouvert J inclus dans I, on a $f(x) \leq f(c) = M$
On dira que ***f* admet un minimum local *m* en *c*** si, pour tout réel x d'un certain intervalle ouvert J inclus dans I, on a $f(x) \geq f(c) = m$

Théorème:
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si f présente un extremum local en $c \in I$, **alors** $f'(c) = 0$

Théorème réciproque:
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $c \in I$.
Si $f'(c) = 0$ et **si** f' change de signe en c **alors** f admet un extremum local en c.

5. COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES DE FONCTIONS

a) Limites en $+\infty$ et $-\infty$

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I du type $[\alpha;+\infty[$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. On se fixe un nombre réel A aussi grand que l'on veut. Supposons qu'il est alors possible de trouver un réel a tel que $f(x) > A$ pour tout $x > a$ (au final, cela peut se traduire par " $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès lors que x est assez grand"). **Dans ce cas on dira que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (ou encore que *f* admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$), et on notera** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
On définit de manière tout à fait analogue: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

A retenir: limites des fonctions de référence:

Limites en $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Limites en $-\infty$: $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair $\quad \lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair

Définition:
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* du type $[\alpha;+\infty[$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. On se fixe un nombre réel positif ε aussi petit que l'on veut. Supposons qu'il existe un réel *L* tel qu'il soit possible de trouver un réel *a* tel que $|f(x)-L|<\varepsilon$ pour tout $x>a$ (au final, cela peut se traduire par " $f(x)$ est aussi proche de *L* que l'on veut dès lors que *x* est assez grand": les valeurs de la fonction *f* viennent s'accumuler autour de *L*). **Dans ce cas on dira que $f(x)$ tend vers *L* lorsque *x* tend vers $+\infty$ (ou encore que *f* admet *L* comme limite en $+\infty$), et on notera $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$**

On définit de manière tout à fait analogue $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

A retenir: limites des fonctions de référence:

Limites en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^2=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^n=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/\sqrt{x}=0$

Limites en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} 1/x=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} 1/x^2=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} 1/x^n=0\ \forall n\geq 3$

Définition: **asymptote horizontale**
Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$) on dit que la droite d'équation $(y=L)$ est **asymptote** à la courbe représentative de *f* en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Définition: **asymptote oblique**
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* du type $[\alpha;+\infty[$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que *f* admette une limite infinie en $+\infty$ (i.e. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$).
On dira que la droite d'équation $(y=ax+b)$, avec $a\neq 0$, est **asymptote oblique** à la courbe représentative de *f* en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.

b) Limites en un réel *a*

Définition:
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* du type $]-\infty;a[$ ou $]b;a[$. Si les valeurs de $f(x)$ deviennent aussi grandes que l'on veut dès lors que *x* est assez proche de *a* (tout en restant dans l'intervalle *I*), alors **on dira que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque *x* tend vers *a* par valeurs inférieures (ou encore que *f* admet $+\infty$ comme limite à gauche en *a*), et on notera**

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty \quad \textbf{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* du type $]a;+\infty[$ ou $]a;b[$. Si les valeurs de $f(x)$ deviennent aussi grandes que l'on veut dès lors que *x* est assez proche de *a* (tout en restant dans l'intervalle *I*), alors **on dira que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque *x* tend vers *a* par valeurs supérieures (ou encore que *f* admet $+\infty$ comme limite à droite en *a*), et on notera**

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty \quad \textbf{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

On définit de manière totalement analogue $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

Définition: **asymptote verticale**
Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\pm\infty$ (ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\pm\infty$) on dit que la droite d'équation $(x=a)$ est **asymptote** à la courbe représentative de *f*.

A retenir: limites des fonctions de référence:

Limites en 0^+ : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1/x = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1/x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1/x^n = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1/\sqrt{x} = +\infty$

Limites en 0^- : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1/x = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1/x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1/x^n = +\infty$ si n est pair

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1/x^n = -\infty$ si n est impair

c) Opérations sur les limites:

Produit d'une fonction par un réel non nul

$\lim f$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(kf)$ avec $k>0$	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(kf)$ avec $k<0$	kL	$-\infty$	$+\infty$

Somme de deux fonctions

$\lim f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(f+g)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**???**

Produit de deux fonctions

$\lim f$	L	$L<0$	$L<0$	$L>0$	$L>0$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim(f\times g)$	$L\times L'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**???**

Quotient de deux fonctions

Si $\lim g$ est non nulle:

$\lim f$	L	$L<0$	$L<0$	$L>0$	$L>0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim g$	$L'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim(f/g)$	L/L'	0^-	0^+	0^+	0^-	**???**

Si $\lim g$ est nulle:

$\lim f$	$L<0$	$L<0$	$L>0$	$L>0$	0
$\lim g$	0^-	0^+	0^-	0^+	0
$\lim(f/g)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**???**

Pour lever les indéterminations :

Théorème:

La limite d'un polynôme en $\pm\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré.

La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

6. SUITES NUMERIQUES

Définition:
Une **suite** u est une fonction $u : n \mapsto u(n) = u_n$ dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$): à chaque entier naturel n on associe un nombre réel noté u_n, appelé **terme de rang *n*** (ou d'**indice** n) de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Modes de génération d'une suite:

- soit par une définition **explicite** du terme de rang n, du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle du type [a ; + ∞ [où a est un réel .
- soit par une relation dite de **récurrence** du type $u_{n+1} = f(u_n)$ **, avec** $u_0 = a \in \mathbb{R}$, où f est une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$

Définition:
Dire qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est:

strictement croissante à partir du rang p signifie que, $\forall n \geq p$, on a $u_{n+1} \geq u_n$
strictement décroissante à partir du rang p signifie que, $\forall n \geq p$, on a $u_{n+1} \leq u_n$
stationnaire à partir du rang p signifie que, $\forall n \geq p$, on a $u_{n+1} = u_n$

En particulier:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0;+\infty[$;

- Si f est strictement croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante
- Si f est strictement décroissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante

Si jamais tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **strictement positifs**, on peut également comparer le quotient u_{n+1}/u_n à 1

Définition:
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \geq m$
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq M$
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Suites arithmétiques:

Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmétique** signifie qu'il existe un réel r, appelé **raison** de cette suite, telle que, pour tout entier naturel n, on ait: $u_{n+1} = u_n + r$
Pour reconnaître une suite arithmétique: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est un réel fixe.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 et de raison r,
alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$ et pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n-p)r$
La somme des n premiers entiers naturels non nuls est donnée par : $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
La somme S de N termes consécutifs d'une suite arithmétique , de premier terme a et de dernier terme b est donnée par : $S = N\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

Suites géométriques:

Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **géométrique** signifie qu'il existe un réel *q*, appelé **raison** de cette suite, telle que, pour tout entier naturel *n*, on ait: $u_{n+1} = qu_n$

Pour reconnaître une suite géométrique: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique si et seulement si elle est à termes non nuls et si, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_{n+1}/u_n est un réel fixe.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de 1$^{\text{er}}$ terme u_0 et de raison *r*,

alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 q^n$ et pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p q^{n-p}$

La somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique de raison *q* et de premier terme 1 est donnée par : $1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

La somme *S* de *N* termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme *a*, de dernier terme *b* et de raison $q \neq 1$ est donnée par : $S = a\left(\dfrac{1-q^N}{1-q}\right)$

Définition: limite infinie

On se fixe un nombre réel *A* positif aussi grand que l'on veut. Supposons qu'il est alors possible de trouver un entier naturel *N* tel que $u_n > A$ pour tout $n \geq N$ (au final, cela peut se traduire par "u_n est aussi grand que l'on veut dès lors que *n* est assez grand").

Dans ce cas on dira que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$, et on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

On définit de manière analogue $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

A retenir: limites infinies de suites de référence:

Les suites de termes généraux $\sqrt{n}$, n, n^2, n^3, n^4 ont pour limite $+\infty$.

Définition: limite finie

On se fixe un nombre réel positif ε aussi petit que l'on veut. Supposons qu'il existe un réel *L* tel qu'il soit possible de trouver un entier naturel *N* tel que $|u_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ (autrement dit tel que $L-\varepsilon < u_n < L+\varepsilon$ pour tout $n \geq N$). Cela peut se traduire - au choix - par:

- u_n est aussi proche de *L* que l'on veut dès lors que *n* est assez grand;
- Les valeurs des termes la suite (u_n) viennent s'accumuler autour de *L*;
- Tout intervalle ouvert centré sur L contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Dans ce cas on dira que la suite (u_n) est <u>convergente</u>, et qu'elle tend vers *L* (ou encore qu'elle admet *L* comme limite), on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

A retenir: limites finies de suites de référence:

Les suites de termes généraux $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n^3}$, $\dfrac{1}{n^4}$ ont pour limite 0.

Propriété Soit (u_n) une suite dont on connaît une définition explicite $u_n = f(n)$, où *f* est une fonction définie sur un intervalle du type $[a;+\infty[$.

Si *f* admet une limite finie ou infinie en $+\infty$, alors la suite (u_n) admet la même limite.

Théorème des gendarmes: Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang *p*, on ait: $u_n \le v_n \le w_n$. Si (u_n) et (w_n) sont toutes les deux convergentes, de limite commune *L*, alors la suite (v_n) est elle aussi convergente, de limite *L*.

Opérations sur les limites Les résultats énoncés à propos de la limite en $+\infty$ d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions restent vrais pour les suites:

Limites des suites arithmétiques et géométriques:
De manière évidente, toute suite arithmétique est divergente:
- vers $+\infty$ si sa raison *r* est strictement **positive**
- vers $-\infty$ si sa raison *r* est strictement **négative**.

De manière évidente:
- Si $q \le -1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (et n'admet pas de limite).
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Si $q = 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (si $u_0 > 0$) ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (si $u_0 < 0$)

7. GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Définition:
Si deux droites Δ_1 et Δ_2 sont situées dans un même plan, elles sont dites coplanaires

Définitions: parallélisme
- Deux **droites** sont dites strictement **parallèles entre elles** lorsqu'elles sont coplanaires et sans point commun
- Deux **plans** sont dits strictement **parallèles entre eux** lorsqu'ils n'ont aucun point commun.
- Une **droite** et un **plan** sont dits strictement **parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

Définitions: orthogonalité
- Deux **droites** d et d' (non nécessairement coplanaires) sont dites **orthogonales entre elles** signifie que les parallèles à d et d' menées par un point O quelconque de l'espace sont perpendiculaires dans le plan qu'elles forment.
- Soit d une droite sécante à un plan (P). On dira que la **droite** d est **orthogonale** au **plan** (P) si d est perpendiculaire à toutes les droites de (P).

Positions relatives de deux droites
Deux droites coplanaires peuvent être
- soit **sécantes** (un seul point commun),
- soit strictement **parallèles** (aucun point commun)
- soit **confondues** (tous leurs points en commun).

Positions relatives de deux plans.
Deux plans peuvent être

- soit strictement **parallèles** (s'ils n'ont aucun point en commun),
- soit **sécants** (selon une droite),
- soit **confondus** (s'ils ont tous leurs points en commun).

Positions relatives d'une droite et d'un plan.
Une droite d et un plan (P) peuvent être soit:

- strictement **parallèles** (sans aucun point commun),
- soit **sécants** (un seul point commun).

La droite d peut également être incluse dans le plan (P).

Théorème du toit:
Soient deux plans (P) et (P') sécants selon une droite Δ. Si l'on suppose que (P) contient une droite d, que (P') contient une droite d', telles que ces deux droites d et d' soient parallèles, alors on peut dire que Δ est parallèle à d et d'.

Théorème des plans parallèles:
Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les deux droites d'intersection obtenues sont parallèles.

Propriété: parallélisme d'une droite et d'un plan
Soit un plan (P) contenant une droite d. Toute droite d' parallèle à d est parallèle au plan (P) tout entier.

Propriété: parallélisme de deux droites
Soient d et d' deux droites parallèles dans l'espace. Alors:

- tout plan parallèle à d est parallèle à d'.
- toute droite parallèle à d est parallèle à d';

Propriété: parallélisme de deux plans
Soient (P) et (P') deux plans parallèles dans l'espace. Alors:

- toute droite parallèle à (P) est parallèle à (P').
- tout plan parallèle à (P) est parallèle à (P').

Théorème de la porte:
Pour qu'une droite d et un plan (P) soient orthogonaux, il **suffit** que d soit orthogonale à **deux** droites sécantes du plan (P). d est alors orthogonale à toutes les droites contenues dans (P).

Propriétés: orthogonalité d'une droite et d'un plan

- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.
- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre………

Définition:
Soient A et B deux points distincts de l'espace; l'ensemble des points M tels que MA = MB (points **équidistants** de A et B) forme un plan, orthogonal à la droite (AB) passant par le milieu de [AB]. Ce plan est appelé **plan médiateur** du segment [AB].

8. VECTEURS DE L'ESPACE

Extension de la notion de vecteur à l'espace.
La notion de vecteur du plan s'étend naturellement à l'espace: ainsi,

- leur définition
- leur caractérisation par direction, sens et norme
- L'égalité de deux vecteurs
- l'addition de deux vecteurs (+ relation de Chasles)
- la multiplication d'un vecteur par un nombre réel

sont des notions qui restent inchangées, que l'on se place dans le plan ou dans l'espace.

Définition: vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, c'est–à–dire quand il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Définition: vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **coplanaires** lorsque, ayant choisi un point O quelconque, et défini les points A, B et C par $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, on trouve que les points O, A, B et C sont coplanaires (situés dans un même plan).

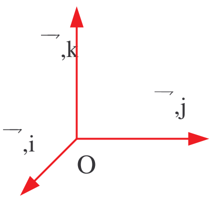
Théorème: caractérisation de la coplanarité

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Alors dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire qu'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Définition:
Un **repère** de l'espace est la donnée d'un point O appelé **origine** du repère, et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ formant ce que l'on appelle une **base**.

Soient I, J et K les trois points de l'espace tels que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est dit repère orthogonal de l'espace si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires deux à deux. Si de plus $OI = OJ = OK = 1$ le repère est dit orthonormal



Théorème-définition:
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, à tout point M on peut associer un (et un seul) triplet de nombres $(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

On note $M(x;y;z)$ où x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z la cote du point M.

Le triplet (x ; y ; z) est appelé triplet de coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Définition:
Soit $\vec{u}$ un vecteur. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, notons M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

M a pour coordonnées $(x;y;z)$ dans ce repère, d'où . $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

On dit que **le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées** $(x;y;z)$ dans ce repère. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Propriétés:

- Dire que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont égaux revient à dire que $x = x', y = y'$ et $z = z'$
- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs. Alors pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$ et $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$
- Si $M(x;y;z)$ et $M'(x';y';z')$ sont deux points de l'espace, alors $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$
- Si $M(x;y;z)$ et $M'(x';y';z')$ sont deux points de l'espace, alors le milieu I de $[MM']$ a pour coordonnées $I\left(\dfrac{x+x'}{2};\dfrac{y+y'}{2};\dfrac{z+z'}{2}\right)$

Théorème: Dans un repère **orthonormal**, si on a $M(x;y;z)$ et $M'(x';y';z')$, alors $MM'^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$.

Définition: Si le plan ou l'espace est muni d'un repère, alors une **équation cartésienne** d'une figure F est une relation vérifiée par les coordonnées de **tous** les points de F, et **seulement** par les coordonnées des points de F.

Théorème:

- Tout plan parallèle au plan (xOy) admet une équation cartésienne du type $(z = a)$, où $a \in \mathbb{R}$
- Tout plan parallèle au plan (yOz) admet une équation cartésienne du type $(x = b)$ où $b \in \mathbb{R}$
- Tout plan parallèle au plan (xOz) admet une équation cartésienne du type $(y = c)$, où $c \in \mathbb{R}$

Définition-théorème:
La sphère S de centre O (origine du repère) et de rayon R > 0 est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $OM = R$. Une équation cartésienne de cette sphère est $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Théorème:

- Une équation cartésienne du cylindre de rayon R>0 ayant (Ox) pour axe de révolution est: $y^2 + z^2 = R^2$
- Une équation cartésienne du cylindre de rayon R>0 ayant (Oy) pour axe de révolution est: $x^2 + z^2 = R^2$
- Une équation cartésienne du cylindre de rayon R>0 ayant (Oz) pour axe de révolution est: $x^2 + y^2 = R^2$

Théorème:

- Une équation cartésienne du cône de sommet O ayant (Ox) pour axe de révolution est:
  $y^2 + z^2 - ax^2 = 0$ où a est un réel strictement positif
- Une équation cartésienne du cône de sommet O ayant (Oy) pour axe de révolution est:
  $x^2 + z^2 - ay^2 = 0$ où a est un réel strictement positif
- Une équation cartésienne du cônee de sommet O ayant (Oz) pour axe de révolution est:
  $x^2 + y^2 - az^2 = 0$ où a est un réel strictement positif

9. BARYCENTRES

Par la suite E désignera indifféremment le plan ou l'espace

Définition:
Si A est un point de E, et si α est un réel, alors le couple $(A;\alpha)$ est appelé **point pondéré de poids α**, ou encore **point affecté du coefficient α.**

Théorème : barycentre de deux points
Si $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ sont deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$, alors il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, appelé **barycentre du système de points pondérés $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$**

Formule de placement: dans ce cas on a $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Définition:
Si $\alpha = \beta \neq 0$, alors le point G est appelé **isobarycentre** des points A et B. G est ici le milieu du segment $[AB]$.

Propriété d'homogénéité:
Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, alors G est le barycentre de $\{(A;k\alpha);(B;k\beta)\}$.

Propriété de réduction d'une expression vectorielle:
Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, alors, pour tout point M de E, on a

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

Théorème: barycentre de trois points
Si $(A;\alpha)$,$(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ sont trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, appelé **barycentre du système de points pondérés $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$**

Formule de placement: on a alors $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

Définition: lorsque $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, G est appelé **isobarycentre** des points A, B et C. G est ici le centre de gravité du triangle ABC.

Propriété d'homogénéité:
Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$, alors G est le barycentre de $\{(A;k\alpha);(B;k\beta);(C;k\gamma)\}$.

Propriété: réduction d'une expression vectorielle:
Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$, alors, pour tout point M de E, on a

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Propriété d'associativité du barycentre
Soit G le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$.
Supposons que $\alpha + \beta \neq 0$, et que l'on appelle H le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.
Alors G est le barycentre de $\{(H;\alpha+\beta);(C;\gamma)\}$

On généralise de façon naturelle les résultats établis pour les barycentres de deux ou trois points:

Théorème: coordonnées du barycentre

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan (resp. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace , si G est le barycentre de $\{(A_1;\alpha_1);(A_2;\alpha_2);\ldots\ldots;(A_N;\alpha_N)\}$ où les points A_i, $1\leq i\leq N$, ont pour coordonnées $(x_i;y_i)$ (resp. $(x_i;y_i;z_i)$), alors G a pour coordonnées:

$$x_G=\frac{\sum_{i=1}^{i=N}\alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=N}\alpha_i}\qquad y_G=\frac{\sum_{i=1}^{i=N}\alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=N}\alpha_i}\qquad \left(z_G=\frac{\sum_{i=1}^{i=N}\alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{i=N}\alpha_i}\right)$$

Pour N = 2

Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ alors $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$, $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$, $\left(z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}\right)$

Pour N = 3

Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ alors $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$, $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\left(z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$

10. ANGLES ORIENTES

Définition:

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens positif** (ou direct) .L'autre sens est appelé **sens négatif** (ou indirect, ou rétrograde).

Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi **sens trigonométrique**)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, O un point quelconque et $\mathcal{C}$ le **cercle trigonométrique** de centre O (qui est un cercle orienté de rayon 1).

Soient A' et B' les points définis par $\overrightarrow{OA'}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'}=\vec{v}$. Les demi-droites $[OA')$ et $[OB')$ coupent le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ respectivement en A et en B.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ sont unitaires (c'est-à-dire de norme égale à 1),

respectivement colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de même sens qu'eux . Au couple $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ on associe une famille de nombres de la forme $\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (où α est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru de A vers B dans le sens direct).

Définition:

Chacun de ces nombres est une **mesure en radians** l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$.

Si α est une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$, alors toute autre mesure de $(\vec{u};\vec{v})$ est de la forme $\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

On écrira $(\vec{u};\vec{v}) = \alpha\ (2\pi)$

Définition:

Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$ appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. On l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$

Angles et colinéarité, angles et orthogonalité

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** revient à dire que la mesure principale de $(\vec{u};\vec{v})$ est égale à $0(2\pi)$. (*si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont de même sens*) **ou alors** que la mesure principale de $(\vec{u};\vec{v})$ est égale à $\pi(2\pi)$ (*si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont de sens opposés*)
- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** revient à dire que la mesure principale de $(\vec{u};\vec{v})$ est égale à $\frac{\pi}{2}(2\pi)$ **ou** à $-\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

Relation de Chasles:

Pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ non nuls on a $(\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};\vec{w}) = (\vec{u};\vec{w})\ (2\pi)$

Propriétés:

$(\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v})\ (2\pi)$

$(-\vec{u};\vec{v}) = \pi + (\vec{u};\vec{v})\ (2\pi)$

$(\vec{u};-\vec{v}) = \pi + (\vec{u};\vec{v})\ (2\pi)$

$(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})\ (2\pi)$

Définition: rotation

Soient O un point du plan, et α un réel. La rotation de centre O et d'angle α est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M distinct de O, associe le point M' défini par:

$$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) = \alpha(2\pi) \end{cases}$$

11. TRIGONOMETRIE; REPERAGE POLAIRE

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique

Définition:

A tout réel t correspond un **unique** point M de $\mathcal{C}$ tel que $(\vec{i};\overrightarrow{OM}) = t\ (2\pi)$.

- Le **cosinus du nombre réel *t*,** noté cos *t*, est l'abscisse de M dans $(O;\vec{i};\vec{j})$.
- Le **sinus du nombre réel *t***, noté sin *t*, est l'ordonnée de M dans $(O;\vec{i};\vec{j})$.
- Enfin La **tangente du nombre réel *t*,**
  pour $t \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, notée tan *t*, est le quotient de sin *t* par cos *t*. De plus, si N est le point d'intersection de (OM) avec l'axe $(A;\vec{j})$, tan *t* est l'ordonnée du point N dans $(O;\vec{i};\vec{j})$

Définition:

Si *t* désigne une mesure en radians d'un angle orienté de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$, alors toute autre mesure s'écrit $t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Toute cette famille de nombres est associée au point M, et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$ et .$\sin(t + 2k\pi) = \sin t$

Ainsi on définit le **cosinus** (*resp. le* **sinus**) de **l'angle orienté de vecteurs** $(\vec{u};\vec{v})$ **,** noté $\cos(\vec{u};\vec{v})$ (*resp.* $\sin(\vec{u};\vec{v})$) , comme le cosinus (*resp. le* sinus) de l'une quelconque de ses mesures en radians.

Valeurs remarquables:

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos t$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin t$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Propriétés:

- $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos^2 t + \sin^2 t = 1$
- **Angles associés:**

  $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \cos(-t) = \cos t \qquad \sin(-t) = -\sin t$

  $\cos(\pi - t) = -\cos t \qquad \sin(\pi - t) = \sin t$

  $\cos(\pi + t) = -\cos t \qquad \sin(\pi + t) = -\sin t$

  $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \qquad \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$

  $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t \qquad \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$

- **Formules d'addition**

  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

- **Formules de duplication**

  $\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

  $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

Définition : repérage polaire

Pour tout point M du plan, distinct de l'origine O, un **couple de coordonnées polaires de M** est un couple $(\rho;\theta)$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $\rho = OM$ et $\theta = (\vec{i};\overrightarrow{OM})(2\pi)$. On notera $M[\rho;\theta]$.

Propriété : Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, et vice-versa:

- Si M (distinct de l'origine O)a pour coordonnées polaires $[\rho;\theta]$, alors les coordonnées cartésiennes de M sont données par $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$
- Si M (distinct de l'origine O)a pour coordonnées cartésiennes $(x;y)$, alors un couple de coordonnées polaires de M est $[\rho;\theta]$, avec $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ cos\theta = x/\sqrt{x^2+y^2} \\ sin\theta = y/\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

12. PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

Définition: Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le **nombre réel** défini par:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ car $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=1$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires, alors on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ car $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=-1$.

Produit scalaire et projetés orthogonaux:
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Soient A, B et C les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, et H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\begin{cases} AB\times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de meme sens} \\ -AB\times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés}\end{cases}$$

Plus généralement, si A, B, C, D sont les points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$, et si H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB), alors on a:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}=\begin{cases} AB\times HK \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ sont de meme sens} \\ -AB\times HK \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ sont de sens contraires}\end{cases}$$

Propriétés: Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan
Le produit scalaire est **symétrique**: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
Le produit scalaire est **linéaire**: Pour $\lambda\in\mathbb{R}$ $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Egalités remarquables:

① $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ Autrement dit $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$

② $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ Autrement dit $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$

③ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ Autrement dit $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Remarque:
Ceci nous fournit une troisième expression du produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

Théorème:
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Propriété: le plan est rapporté à un repère **orthonormal** $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$; Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=x\,x'+y\,y'$

Ainsi, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si . $x\,x'+y\,y'=0$

Relations d'Al-Kashi:
C'est une généralisation du théorème de Pythagore:
Soit ABC un triangle quelconque; on pose $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$. On a les relations suivantes:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ $\qquad$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ $\qquad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

Formule des sinus:
Soit ABC un "vrai" triangle (ie non aplati), d'aire S. On pose $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$. On a les égalités suivantes:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

Formules de la médiane:
Soient M, A et B trois points du plan; soit I le milieu de $[AB]$. On a les égalités suivantes:

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ $\qquad$ $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$

Application du produit scalaire aux équations cartésiennes de droites et de cercles

Définition:
Soit d une droite du plan, et $\vec{n}$ un vecteur non nul. On dira que $\vec{n}$ est un **vecteur normal à *d*** si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.

Théorème:
Dans un repère quelconque du plan, toute droite admet une équation du type $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont trois réels.
Réciproquement, l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$, avec a et b réels non simultanément nuls, est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Théorème:
Si on se place dans un repère **orthonormal**:

- Toute droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$ admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.
- Si un vecteur $\vec{n}$ non nul de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à une droite d, alors cette droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Propriété:
Si deux droites d et Δ, dans un repère orthonormal, ont pour équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, alors $d \perp \Delta$ si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

Propriété:
Si deux droites d et Δ non parallèles à (Oy), dans un repère orthonormal, ont pour équations cartésiennes réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, alors $d \perp \Delta \Leftrightarrow mm' = -1$.

Théorème:
Le cercle C de centre $\Omega(a;b)$ de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
Ceci constitue une **équation cartésienne du cercle C**, qui peut être donnée sous forme développée par $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$
Réciproquement**,**
l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation cartésienne $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ avec $\alpha^2+\beta^2-4\gamma>0$ est un cercle de centre $\Omega\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2-4\gamma)$

Remarque:
Le cercle C de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que l'on ait $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

13. TRANSLATIONS ET HOMOTHETIES

Définition:
Soit $\vec{u}$ un vecteur. La translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est l'application de l'espace dans lui-même définie qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$. $t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

Premières conséquences:
- Une translation de vecteur non nul n'admet aucun point invariant (un point invariant est un point qui est confondu avec sa propre image)
- La translation de vecteur nul est l'identité de l'espace (tous les points sont confondus avec leur propre image)
- Tout point de l'espace admet un unique antécédent par la translation $t_{\vec{u}}$
  (en fait, on a $t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow M=t_{-\vec{u}}(M')$)
- Si $t_{\vec{u}}(M)=M'$ et $t_{\vec{u}}(N)=N'$, alors $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

Définition:
Soit O un point de l'espace, et k un réel non nul. L'homothétie de centre O et de rapport k, notée $h_{O,k}$, est l'application de l'espace dans lui-même définie qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$ $h_{O,k}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$

Premières conséquences:
- Une translation de rapport égal à 1 est l'identité de l'espace (tous les points sont confondus avec leur propre image). Une homothétie de rapport égal à –1 est la symétrie de centre O.
- Une homothétie de rapport différent de 1 n'admet qu'un seul point invariant (un point invariant est un point qui est confondu avec sa propre image): son centre.
- Si $h_{O,k}(M)=M'$ avec M distinct de O alors O, M et M' sont alignés.
- Tout point de l'espace admet un unique antécédent par l'homothétie $h_{O,k}$
  (en fait, on a $h_{O,k}(M)=M' \Leftrightarrow M=h_{O,\frac{1}{k}}(M')$)
- Si $h_{O,k}(M)=M'$ et $h_{O,k}(N)=N'$, alors $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

14. PROBABILITES

Définitions:

- Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité** liée à l'expérience aléatoire.
- L'ensemble formé par les éventualités liées à une expérience aléatoire est appelé **univers** de l'expérience; il est très souvent noté Ω.
- Un **événement** de l'expérience aléatoire est une partie quelconque (un *sous-ensemble*) de l'univers. Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est qualifié d'**événement élémentaire**.
- L'événement qui ne contient aucune éventualité est qualifié d'**événement impossible**, et est noté $\varnothing$**.** L'événement qui est composé de toutes les éventualités (c'est-à-dire Ω lui-même) est appelé **événement certain.**
- Soient *A*, *B* deux événements.
  L'événement ***A* et *B*** est l'événement qui se réalise lorsque *A* et *B* se réalisent simultanément. On le note $\boldsymbol{A \cap B}$.
  L'événement ***A* ou *B*** est l'événement qui se réalise lorsque au moins l'un des événements *A* et *B* se réalise. On le note $\boldsymbol{A \cup B}$.
- Deux événements *A* et *B* d'une expérience aléatoire seront dits **incompatibles** lorsqu'ils n'ont aucune éventualité en commun (c'est-à-dire lorsque l'intersection des sous-ensembles *A* et *B* est vide: $A \cap B = \varnothing$).
- Pour tout événement *A* il existe un événement noté $\overline{A}$, et appelé **événement contraire** de *A*, qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans *A*. On a en particulier $A \cup \overline{A} = \Omega$

Propriétés:

- Un événement *A* et son événement contraire $\overline{A}$ sont incompatibles: $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
- Le contraire de l'événement $\overline{A}$ est *A* lui-même: $\overline{\overline{A}} = A$.
- Le contraire de l'événement impossible est l'événement certain: $\overline{\varnothing} = \Omega$.

Définition:

Définir une **loi de probabilité** sur l'univers $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; ... ; \omega_n\}$ d'une expérience aléatoire, c'est associer à chaque éventualité $\omega_i \in \Omega$ un nombre $p_i \in [0;1]$ de telle sorte que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$
Chaque nombre p_i est appelé **probabilité** de l'éventualité ω_i.
On donne souvent une loi de probabilité sous la forme d'un tableau:

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	$\dots$	ω_n	**éventualités**
p_1	p_2	p_3	p_4	$\dots$	p_n	**probabilités**

Définition :

Une situation d'**équiprobabilité** est une situation dans laquelle à chaque éventualité de l'univers $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; ... ; \omega_n\}$ on a associé la même probabilité p_i ; dans ce cas on a alors.

$$p_1 = p_2 = ... = p_n = 1/n .$$

On dit aussi que la loi de probabilité est **équirépartie**.

Définition :

Si les éventualités $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ de l'expérience aléatoire sont **des nombres réels**, alors on peut définir:

- l'**espérance** de cette loi par $E = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + ... + p_n\omega_n$

- la **variance** de cette loi P par $V = p_1(\omega_1 - E)^2 + p_2(\omega_2 - E)^2 + ... + p_n(\omega_n - E)^2$
- l'**écart-type** de cette loi P par $\sigma = \sqrt{V}$

Définition:
Supposons qu'une loi de probabilité soit définie sur l'univers $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$ associé à une expérience aléatoire. La probabilité d'un événement *A*, notée $p(A)$, est alors définie comme la somme des probabilités p_i des éventualités ω_i qui le composent.

Un cas particulier: l'équiprobabilité
Dans ce cas on peut calculer la probabilité de n'importe quel événement *A* par :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$$

que l'on peut aussi écrire

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Propriétés:
- Pour tout événement *A* on a $0 \le p(A) \le 1$.
- La probabilité de l'événement certain Ω est égale à 1, celle de l'événement impossible $\varnothing$ est égale à 0: $p(\Omega) = 1$ et $p(\varnothing) = 0$.
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; en particulier:
  Si *A* et *B* sont deux événements incompatibles, alors on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Si *A* est un événement, dont l'événement contraire est $\overline{A}$, alors on a $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

La loi des grands nombres:
" *La fréquence expérimentale d'apparition d'un événement lors d'une répétition d'expériences aléatoires se rapproche de la probabilité de réalisation de cet événement lorsque le nombre d'expériences réalisées est grand* "

Définition:
Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une **variable aléatoire** est une fonction *X* définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition:
Lorsqu'à chaque valeur x_i prise par une variable aléatoire *X*, on associe la probabilité $p_i = p(X = x_i)$, on dit que l'on **définit la loi de probabilité de *X***.

Définition:
Si *X* est une variable aléatoire (V.A.) définie sur Ω, on peut définir:
- l'**espérance** de cette V.A. par $E(X) = x_1 p(X = x_1) + x_2 p(X = x_2) + ... + x_n p(X = x_n)$
- la **variance** de cette V.A. par
  $$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 p(X = x_2) + ... + (x_n - E(X))^2 p(X = x_n)$$
- l'**écart-type** de cette V.A. par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$